Exercice n°1 (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

- L'urne U_1 contient une boules rouges et deux boules noires.
- L'urne U_2 contient trois boules numérotées 1 et deux boules numérotées 0 .

Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 :

$\rightarrow$ Si elle est rouge, on tire simultanément deux boules de U_2.

$\rightarrow$ Si elle est noire, on tire successivement et avec remise deux boules de U_2.

1) a) Calculer la probabilité des évènements suivants:

E:<< Tirer une boule rouge de U_1 >>

A:<< Les deux boules tirées de U_2 sont de même numéro >>

b) Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule noire de U_1, sachant que les deux boules tirées de U_2 sont de même numéro.

2) On considère la variable aléatoire X qui à chaque épreuve associe la somme des numéros marqués sur les deux boules tirées de U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité de l'événement : $(1 \leq X < 3)$.

3) On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 1 pour la première fois au troisième épreuve .

Exercice n°2 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AC = 2AB et AB = a .On désigne par O le milieu du segment $[BC]$.

1) Soit Δ une droite variable parallèle à la droite (AB) et ne traversant pas le segment $[BC]$ et (P) une parabole variable de directrice Δ et passant par B et C.

a) On désigne par F le foyer de (P). Montrer que $|FB - FC| = 2a$.

b) Déduire que F varie sur une hyperbole (H) dont on précisera les foyers et la longueur de l'axe transverse.

c) Construire les sommets et les asymptotes de (H) puis tracer (H).

2) Soit (Γ) une hyperbole passant par B et D dont l'un des foyers est A, où D est le milieu du segment $[AC]$. Montrer que le second foyer A' de (Γ) décrit la réunion d'une droite et une ellipse dont on précisera les foyers et la longueur du grand axe.

3) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice du segment $[BC]$ coupe (ζ) en deux points I et J (J étant situé dans l'arc $[BC]$ ne contenant pas A). Soit (E) l'ellipse de foyers B et C et passant par A.

a) Montrer que les droites (AI) et (AJ) sont les bissectrices du secteur $[\mathrm{AB}, \mathrm{AC}]$.

b) Déduire une construction de la tangente à (E) en A.

c) Construire les sommets de (E) puis tracer (E).

Problème (10 points)

I- Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ f(x) = \dfrac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} t^2e^t$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Construire la courbe (C) de f.

5) Soit α un réel strictement négatif. On désigne par A(α) l'aire de la partie du plan limitée par (C) ; et les droites d'équations : y = -1 ; x = α et x = 0 .

Calculer A(α) et $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha)$.

II- Soit la fonction F définie sur $]1,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{\frac{1}{Logx}} f(t)dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout x de $]1,+\infty[$; $F'(x) = \dfrac{-1}{x^2Logx}$.

2) a) Donner le sens de variation de F sur $]1,+\infty[$.

b) Calculer F(e) et donner le signe de F(x) pour $x \in]1,+\infty[$.

3) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $F(x) = \int_x^e \dfrac{1}{t^2Logt}dt$.

4) a) Vérifier que pour tout $t \in]1,+\infty[$ on a $Logt \le t-1$

et que si $t \in]1,e]$ on a : $\dfrac{1}{t^2Logt} \ge \dfrac{1}{e^2(t-1)}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = +\infty$.

c) Vérifier que si $t \in]e,+\infty[$ on a : $\dfrac{1}{t^2Logt} \le \dfrac{1}{t^2}$.

d) En déduire que F admet une limite l finie en $+\infty$ et que : $\dfrac{-1}{e} < l < 0$.

5) Donner l'allure de la courbe Γ de F dans un nouveau repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

III- Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty,0\right]$.

1) Montrer que g est une bijection de $\left]-\infty,0\right]$ sur $\left]-1,0\right]$. Soit h = g^{-1} .

2) Montrer que pour tout $x \in \left]-1,0\right]$ on a : $h(x) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ puis calculer h'(x).

3) On pose $S_n(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. avec $x \in \left]-1,0\right]$ et $n \in IN^*$.

   a) Montrer que pour tout $t \in \left]-1,0\right]$ on a $1+t^2+t^4+\cdots\cdots\cdots+t^{2n-2} = h'(t) - \frac{t^{2n}}{1-t^2}$.

   b) En déduire que pour tout $x \in \left]-1,0\right]$ on a : $S_n(x) = h(x) - \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \left]-1,0\right]$ on a $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} \le \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le 0$.

   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$.

5) Pour tout n de IN^* on pose $U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$.

   Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) admet une limite finie que l'on donnera.